Temps locaux, excursions browniennes

Léo Gayral

Ces notes sont basées sur le cours de Jean-François Le Gall.

Table des matières

1 Temps locaux

On travaille sur un espace filtré $\big(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P}\big)$.

1.1 Définition

Soit $X = M + V$ une semi-martingale continue.

Proposition 1 :
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe. En particulier f est dérivable à gauche en tout point et on note f'_- sa dérivée, continue à gauche.

Alors il existe un processus croissant A^f tel que $f(X_t) = f(X_0) + \int\limits_0^t f'_-(X_s)\,\mathrm{d}X_s + A^f_t$.

Démonstration. Soit $h \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^+)$ à support dans $[0,1]$, d'intégrale 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $h_n(x) = nh(nx)$.

Posons $f_n = h_n * f$, et $f'_n = h_n * f'_-$. Pour $n \to \infty$, on a convergence simple de $f_n(x)$ (resp. $f'_n(x)$) vers $f(x)$ (resp. $f'_-(x)$).

Par la formule d'Itô, on a $f_n(X_t) = f_n(X_0) + \int\limits_0^t f'_n(X_s)\,\mathrm{d}X_s + A^n_t$, avec A^n un processus croissant car $f''_n \geq 0$ par convexité.

En outre, $\int\limits_0^t f'_n(X_s)\,\mathrm{d}X_s$ converge en probabilité vers l'intégrale souhaitée, par convergence dominée stochastique. On utilise la majoration $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}}|h_n(X_s)| \leq \sup\limits_{X_s-1\leq z\leq X_s}\big|f'_-(z)\big| < \infty$.

Comme tous les autres termes convergent, A^n converge en probabilités vers une limite A^f, adaptée à trajectoires continues, qui part de 0, croissante. □

Remarque 2 :
Quitte à utiliser une fonction h à support dans $[-1,0]$, on obtient un résultat similaire :

$$f(X_t) = f(X_0) + \int\limits_0^t f'_+(X_s)\,\mathrm{d}X_s + \widetilde{A}^f_t\,.$$

On n'a a priori pas égalité entre A^f et $\widetilde{A}^f$.

Théorème 3 (Formules de Tanaka) **:**

Posons ici $\operatorname{sgn}(x) = \mathbb{1}_{x>0} - \mathbb{1}_{x\leq 0}$, la dérivée à gauche de la fonction $x \mapsto |x|$.

Soit $a \in \mathbb{R}$. Il existe un processus croissant $(L_t^a(X))$ tel que :

1. $|X_t - a| = |X_0 - a| + \int_0^t \operatorname{sgn}(X_s - a)\,\mathrm{d}X_s + L_t^a(X)\,,$
2. $(X_t - a)^+ = (X_0 - a)^+ + \int_0^t \mathbb{1}_{X_s > a}\,\mathrm{d}X_s + \frac{1}{2}L_t^a(X)\,,$
3. $(X_t - a)^- = (X_0 - a)^- - \int_0^t \mathbb{1}_{X_s \leq a}\,\mathrm{d}X_s + \frac{1}{2}L_t^a(X)\,.$

Notons que, si T est un TA, alors $L_t^a\big(X^T\big) = L_{t\wedge T}^a(X)$.

Démonstration. La première formule nous sert à définir $L^a(X)$, par la proposition précédente. Les fonctions partie positive et partie négative nous servent alors à définir deux processus $A^{a,+}$ et $A^{a,-}$ de la même façon.

D'une part :

$$(X_t - a) = (X_t - a)^+ - (X_t - a)^- = X_0 - a + \int_0^t 1\,\mathrm{d}X_s + A_t^{a,+} - A_t^{a,-}\,,$$

donc en simplifiant les termes, on conclut $A^{a,+} = A^{a,-}$. D'autre part :

$$|X_t - a| = (X_t - a)^+ + (X_t - a)^- = |X_0 - a| + \int_0^t \operatorname{sgn}(X_s - a)\,\mathrm{d}X_s + \big(A_t^{a,+} + A_t^{a,-}\big)\,,$$

ce qui permet de conclure que $A_t^{a,+} + A_t^{a,-} = L_t^a(X)$. $\square$

Proposition 4 :

Notons $d_s L_s^a(X)$ la mesure positive associée à la fonction $\mapsto L_s^a(X)$. Presque-sûrement, cette mesure est à support dans le fermé $\{s,\, X_s = a\}$.

Autrement dit, $t \mapsto L_t^a(X)$ ne croît que dans cet ensemble.

Démonstration. Considérons le processus $(X_t - a)^2 = (X_0 - a)^2 + 2\int_0^t (X_s - a)\,\mathrm{d}X_s + \langle X, X\rangle_t$.

D'autre part, en appliquant la formule d'Itô au processus $Y_t = |X_t - a|$:

$$Y_t^2 = |X_t - a|^2 = |X_0 - a|^2 + 2\int_0^t Y_s\,\mathrm{d}Y_s + \langle Y, Y\rangle_t\,.$$

Par la formule de Tanaka, on a $\langle Y, Y\rangle_t = \int_0^t \operatorname{sgn}(X_s - a)^2\,\mathrm{d}\langle X, X\rangle_s = \int_0^t 1\,\mathrm{d}\langle X, X\rangle_s = \langle X, X\rangle_t$.

On a de plus $Y_s \,\mathrm{d}Y_s = |X_s - a|\mathrm{sgn}(X_s - a)\,\mathrm{d}X_s + Y_s\,\mathrm{d}_s L_s^a(X)$.

En identifiant les termes un à un dans les deux écritures de Y_t^2, on en déduit que, pour tout $t \geq 0$, on a $\int_0^t |X_s - a|\,\mathrm{d}_s L_s^a(X) = 0$, ce qui conclut la preuve. □

1.2 Continuité des temps locaux

On va s'intéresser à la continuité de $a \mapsto L_a$, à valeurs dans l'espace $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$ muni de la convergence uniforme sur tout compact.

Théorème 5 :

Le processus $(L^a)_{a\in\mathbb{R}}$ admet une modification à trajectoires càdlàg. Pour cette modification, les points de discontinuité sont les $a \in \mathbb{R}$ tels que $\int_0^\infty \mathbb{1}_{\{X_s=a\}}|\mathrm{d}V_s| > 0$ (avec V le processus issu de la décomposition $X = M + V$), et $L_t^a(X) - L_t^{a-}(X) = 2\int_0^t \mathbb{1}_{\{X_s=a\}}\,\mathrm{d}V_s$.

En particulier, si X est une martingale locale, si $V = 0$, alors $(L^a)_a$ admet une modification à trajectoires continues.

Démonstration. Par la formule de Tanaka, on a $\frac{1}{2}L_t^a(X) = \left((X_t - a)^+ - (X_0 - a)^+ - Y_t^a\right) - Z_t^a$, avec $Z_t^a = \int_0^t \mathbb{1}_{X_s>a}\,\mathrm{d}V_s$. Par les lemmes suivants, la partie de gauche est continue. Il reste donc à étudier la continuité de $a \mapsto Z^a$.

Pour t fixé quelconque, $a \mapsto T_t^a$ est continue à droite, et $T_t^a - T_t^{a-} = Z_t^{a-} - Z_t^a = \int_0^t \mathbb{1}_{\{X_s=a\}}\,\mathrm{d}V_s$. Ceci conclut donc la preuve. □

Lemme 6 :

Soit $p \geq 1$. Il existe une constante $C_p > 0$ telle que, pour tous $a < b$:

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t \mathbb{1}_{[a,b]}(X_s)\,\mathrm{d}\langle M, M\rangle_s\right)^p\right] \leq C_p(b-a)^p\mathbb{E}\left[\sqrt{\langle M, M\rangle_t}^{\,p} + \left(\int_0^t |\mathrm{d}V_s|\right)^p\right].$$

Démonstration. Quitte à translater de $\frac{b+a}{2}$, il suffit de montrer le résultat pour les intervalles sous la forme $[-u, u]$. Le terme $(b-a)^p$ attendu est donc un facteur $(2u)^p$ dans ce cas.

Considérons alors la fonction $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ définie par $f(0) = f'(0) = 0$ ainsi que sa dérivée seconde $f''(x) = \left(2 - \frac{|x|}{u}\right)^+ \geq \mathbb{1}_{[-u,u]}(x)$. Naturellement, $|f'| \leq 2u$.

Par la formule d'Itô, $f(X_s) = f(X_0) + \int\limits_0^t f'(X_s)\,\mathrm{d}X_s + \frac{1}{2}\int\limits_0^t f''(X_s)\,\mathrm{d}\langle M,M\rangle_s$. On a donc :

$$\int\limits_0^t \mathbb{1}_{[-u,u]}(X_s)\,\mathrm{d}\langle M,M\rangle_s \leq \int\limits_0^t f''(X_s)\,\mathrm{d}\langle M,M\rangle_s \leq 2\left(|f(X_t) - f(X_0)| + \left|\int\limits_0^t f'(X_s)\,\mathrm{d}X_s\right|\right).$$

Rappelons qu'il existe une constante C dépendante de p telle que $(a+b)^p \leq C(a^p + b^p)$, pour tous $a, b \geq 0$. En particulier, on a :

$$\mathbb{E}\left[\left(\int\limits_0^t \mathbb{1}_{[-u,u]}(X_s)\,\mathrm{d}\langle M,M\rangle_s\right)^p\right] \leq C\mathbb{E}\left[|f(X_t) - f(X_0)|^p + \left|\int\limits_0^t f'(X_s)\,\mathrm{d}X_s\right|^p\right].$$

Comme $|f'| \leq 2u$, on en déduit que $|f(X_t) - f(X_0)|^p \leq (2u)^p|X_t - X_0|^p$. En outre, on a $|X_t - X_0| \leq |M_t - M_0| + \int\limits_0^t |\mathrm{d}V_s|$. À la puissance p :

$$\mathbb{E}[|f(X_t) - f(X_0)|^p] \leq C\mathbb{E}\left[|M_t - M_0|^p + \left(\int\limits_0^t |\mathrm{d}V_s|\right)^p\right].$$

On peut alors majorer le terme dépendant de M par une espérance sur le crochet $\langle M, M\rangle$ via l'inégalité BDG. Pour l'autre terme, on peut en outre séparer l'espérance en deux termes, une intégrale contre $\mathrm{d}M_s$ et l'autre contre $\mathrm{d}V_s$, au prix d'un nouveau facteur C. On peut explicitement majorer la *vraie* intégrale contre la mesure $\mathrm{d}V_s$, et pour l'autre terme, à nouveau via l'inégalité BDG, on a :

$$\mathbb{E}\left[\left|\int\limits_0^t f'(X_s)\,\mathrm{d}M_s\right|^p\right] \leq C_p\left[\left(\int\limits_0^t f'(X_s)^2\,\mathrm{d}\langle M,M\rangle_s\right)^{p/2}\right] \leq (2u)^p C_p \mathbb{E}\left[\sqrt{\langle M,M\rangle_t}^{\,p}\right].$$

Finalement, en emboitant toutes ces majorations, quitte à prendre une nouvelle constante C_p assez grande, on obtient le résultat initialement annoncé. □

Lemme 7 :

Soit $Y_t^a = \int\limits_0^t \mathbb{1}_{X_s=a}\,\mathrm{d}M_s$. Le processus Y^a a une modification continue.

Démonstration. Soit le TA $T_n = \inf\left\{t \geq 0,\ \langle M,M\rangle_t + \int\limits_0^t |\mathrm{d}V_s| \geq n\right\}$. Si on applique le lemme précédent au processus X^{T_n}, on majore à droite par $C_p(b-a)^p\left(\sqrt{n}^p + n^p\right)$.

Lorsque $p \geq 2$, par BDG, on a ainsi :

$$\mathbb{E}\left[\sup_{s\leq t\wedge T_n}\left|Y_s^a - Y_s^b\right|^p\right] = \mathbb{E}\left[\sup_{s\leq t\wedge T_n}\left|\int_0^s \mathbb{1}_{[a,b]}(X_s)\,\mathrm{d}\langle M,M\rangle_s\right|^p\right] \leq \widetilde{C_p}\sqrt{b-a}^p\left(n^{p/4}+n^{p/2}\right).$$

En faisant tendre $t \to \infty$, on étend cette inégalité à $\mathbb{R}^+$ tout entier (pour le processus arrêté en T_n). Par le lemme de Kolmogorov, le processus Y^a arrêté en T_n a une modification à trajectoires continues. Quitte à prendre la limite des modifications, on obtient enfin une modification de Y^a continue jusqu'à tout T_n, continue. □

1.3 Formule de densité de temps d'occupation

Remarque 8 :

Soit f convexe réelle. Par croissance de f'_-, on définit la mesure positive f'' via la relation $f''([a,b[) = f'_-(b) - f'_-(a)$. Si $f = g - h$ avec g et h convexes, on peut plus généralement définir la mesure signée $f'' = g'' - h''$, finie sur tout compact.

Théorème 9 (Formule d'Itô généralisée) **:**

Soit f différence de fonctions convexes. Alors $f(X_t) = f(X_0) + \int\limits_0^t f'_-(X_s)\,\mathrm{d}X_s + \frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}} L_t^a(X) df''(a)$.

L'intégrale de droite est notamment bien définie car les trajectoires de $(L^a)_a$ sont des fonctions càdlàg à support compact.

Démonstration. Par linéarité, on le montre dans le cas où f est convexe. Quitte à arrêter le processus X dans un compact $[-K,K]$, on peut supposer que f est affine en dehors de cet intervalle, que f'' est à support dans $[-K,K]$. En outre, quitte à ajouter une autre fonction affine, f est nulle sur $]-\infty,K]$.

On vérifie que $f(x) = \int\limits_{\mathbb{R}} (x-a)^+\,\mathrm{d}f''(a)$. Alors :

$$\begin{aligned} f(X_t) &= \int_{\mathbb{R}} (X_t - a)^+\,\mathrm{d}f''(a) \\ &= \int_{\mathbb{R}} (X_0 - a)^+\,\mathrm{d}f''(a) + \int_{\mathbb{R}} Y_t^a\,\mathrm{d}f''(a) + \int_{\mathbb{R}} Z_t^a\,\mathrm{d}f''(a) + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} L_t^a(X)\,\mathrm{d}f''(a) \\ &= f(X_0) + \int_{\mathbb{R}}\left(\int_0^t \mathbb{1}_{\{X_s\ a\}}\,\mathrm{d}M_s\right)\mathrm{d}f''(a) + \int_{\mathbb{R}}\left(\int_0^t \mathbb{1}_{\{X_s\ a\}}\,\mathrm{d}V_s\right)\mathrm{d}f''(a) + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} L_t^a(X)\,\mathrm{d}f''(a). \end{aligned}$$

Pour conclure sur le théorème, il faut pouvoir inverser l'intégrale en a et celle en t pour les deux termes centraux dans la dernière ligne. Pur celui de droite, cette inversion se fait trajectoire par trajectoire, par le théorème de Fubini.

Pour celui de gauche, commençons par arrêter le processus en T_n quand $\langle M,M\rangle_t$ dépasse n. On montre alors que $Z_t := \int\limits_{\mathbb{R}}\left(\int\limits_0^{t\wedge T_n} \mathbb{1}_{\{X_s\ a\}}\,\mathrm{d}M_s\right)\mathrm{d}f''(a)$ est bien une martingale. Posons Z' la martingale correspondant à Z où on inverse les deux intégrales. On considère ainsi deux martingales de $\mathbb{H}^2$, bornées dans L^2, dont on vérifie qu'elles ont les mêmes produits scalaires contre tout processus dans cet espace, et donc finalement $Z = Z'$. □

Corollaire 10 (Formule de densité des temps d'occupation) **:**

Presque-sûrement, pour toute fonction φ mesurable positive, on a :

$$\int_0^t \varphi(X_s)\,\mathrm{d}\langle X, X\rangle_s = \int_{\mathbb{R}} \varphi(a) L_t^a(X)\,\mathrm{d}a\,.$$

Démonstration. Commençons par considérer φ continue à support compact, et f sa primitive seconde, convexe. En identifiant les termes dans la formule d'Itô usuelle, et dans la formule issue du théorème précédent, on conclut directement l'égalité entre les processus :

$$\int_0^t \varphi(X_s)\,\mathrm{d}\langle X, X\rangle_s = \int_{\mathbb{R}} L_t^a\,\mathrm{d}f''(a) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(a) L_t^a\,\mathrm{d}a\,.$$

Par densité des fonctions continues à support compact, on étend alors le résultat à toute fonction positive mesurable, ce qui permet de voir $(a \mapsto L_t^a)$ comme une densité pour la mesure de Lebesgue, qui permet de calculer l'intégrale stochastique de $\varphi(X_s)$ contre le crochet $\mathrm{d}\langle X, X\rangle_s$ comme une intégrale usuelle. □

Remarque 11 :

Plus largement, pour une fonction φ positive sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$, on a :

$$\int_0^\infty \varphi(s, X_s)\,\mathrm{d}\langle X, X\rangle_s = \int_{\mathbb{R}} \int_0^\infty \varphi(s, a)\,\mathrm{d}_s L_s^a(X)\,\mathrm{d}a\,.$$

On peut aisément montrer ce résultat à partir du précédent sur les fonctions $\varphi = \mathbb{1}_E$ avec $E =]u, v] \times A$ et A borélien de $\mathbb{R}$, puis conclure par un argument de classes monotones.

1.4 Approximations du temps local

Proposition 12 :

Presque-sûrement, pour tout $a \in \mathbb{R}$, on a $L_t^a(X) = \lim\limits_{\varepsilon \to 0^+} \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \mathbb{1}_{a \leq X_s \leq a+\varepsilon}\,\mathrm{d}\langle X, X\rangle_s$.

Démonstration. On peut réécrire le terme de droite sous la forme $\frac{1}{\varepsilon} \int_a^{a+\varepsilon} L_t^b(X)\,\mathrm{d}b$. On considère donc la valeur moyenne du temps local sur $[a, a+\varepsilon]$, qui converge vers $L_t^a(X)$ par continuité à droite. $\square$

Remarque 13 :

Considérons plutôt $\frac{1}{2\varepsilon} \int_0^t \mathbb{1}_{|X_s - a| \leq \varepsilon}\,\mathrm{d}\langle X, X\rangle_s$. Dans ce cas, en passant à la limite, on obtient $\widetilde{L}_t^a(X) := \frac{1}{2}\big(L_t^a(X) + L_t^{a-}(X)\big)$, aussi appelé le temps local symétrique.

Corollaire 14 :

Pour tout $p \geq 1$, il existe une constante C_p telle que :

$$\mathbb{E}[(L_t^a(X))^p] \leq C_p \times \mathbb{E}\left[\sqrt{\langle M, M\rangle_t}^{\,2} + \left(\int_0^t |_d V_s|\right)^p\right].$$

Démonstration. On a déjà majoré :

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t \mathbb{1}_{a \leq X_s \leq a+\varepsilon}\,\mathrm{d}\langle X, X\rangle_s\right)^p\right] \leq \varepsilon^p \times (\cdots)\,,$$

où le terme $(\cdots)$ est la majoration voulue. Quitte à diviser par ε^p, puis à appliquer le lemme de Fatou sur le terme de gauche, on obtient finalement le résultat voulu sur $L_t^a(X)$. $\square$

Remarque 15 :

Soit $X = M + V$. Si $\int_0^t \mathbb{1}_{X_s=a} \,\mathrm{d}\langle X, X\rangle_s = 0$, alors $\int_0^t \mathbb{1}_{X_s=a} \,\mathrm{d}M_s = 0$. Cela ne nous donne pas d'information sur l'intégrale contre $\mathrm{d}V_s$.

Ainsi, considérons B un MB issu de 0. On pose $W_t = |B_t| = \int_0^t \operatorname{sgn}(B_s) \,\mathrm{d}B_s + L_t^0(B)$. Le terme de droite correspond à V_t, la variation finie de W, et $\int_0^t \mathbb{1}_{W_s=0} \,\mathrm{d}V_s = \int_0^t \mathbb{1}_{B_s=0} \,\mathrm{d}L_s^0(B) = L_t^0(B)$. En outre, $L_t^0(W) = L_t^0(W) - L_t^{0-}(W) = 2\int_0^t \mathbb{1}_{W_s=0} \,\mathrm{d}V_s = 2L_t^0(B)$.

Définition 16 (Nombre de montées) **:**

Soit $\varepsilon > 0$. On initialise $\tau_0^\varepsilon = 0$, puis on définit par induction $\sigma_{n+1}^\varepsilon = \inf\{t \geq \tau_n^\varepsilon,\ X_t = 0\}$, et $\tau_n^\varepsilon = \inf\{t \geq \sigma_n^\varepsilon,\ X_t = \varepsilon\}$. On pose alors $N_\varepsilon(t) = \#\{n \in \mathbb{N}^*,\ \tau_n^\varepsilon \leq t\}$.

Proposition 17 (Approximation par le nombre de montées) **:**

On a la convergence en probabilité $\varepsilon N_\varepsilon(t) \xrightarrow{\mathbb{P}} \frac{1}{2} L_t^0(X)$.

Démonstration. On a :

$$\left(X_{t\wedge\tau_n^\varepsilon}\right)^+ = X_0^+ + \int_0^{t\wedge\tau_n^\varepsilon} \mathbb{1}_{X_s>0} \,\mathrm{d}X_s + \frac{1}{2} L_{t\wedge\tau_n^\varepsilon}^0(X) = X_0^+ + \int_0^t \mathbb{1}_{[0,\tau_n^\varepsilon]}(s) \mathbb{1}_{X_s>0} \,\mathrm{d}X_s + \frac{1}{2} L_{t\wedge\tau_n^\varepsilon}^0(X)\,.$$

On a une écriture analogue pour $\left(X_{t\wedge\sigma_n^\varepsilon}\right)^+$, d'où :

$$\left(X_{t\wedge\tau_n^\varepsilon}\right)^+ - \left(X_{t\wedge\sigma_n^\varepsilon}\right)^+ = \int_0^t \mathbb{1}_{]\sigma_n^\varepsilon,\tau_n^\varepsilon]}(s) \mathbb{1}_{X_s>0} \,\mathrm{d}X_s + \frac{1}{2}\left(L_{t\wedge\tau_n^\varepsilon}^0 - L_{t\wedge\sigma_n^\varepsilon}^0\right).$$

Dès lors que $n > N_\varepsilon(t)$, les deux temps d'arrêt dépassent t, et donc le terme ci-avant est en fait nul. Quitte à noter $R_\varepsilon \in [0, \varepsilon]$ l'éventuelle différence à cheval autour de l'étape N_ε :

$$\varepsilon N_\varepsilon(t) + R_\varepsilon = \sum_{n\geq 1} \left(X_{t\wedge\tau_n^\varepsilon}\right)^+ - \left(X_{t\wedge\sigma_n^\varepsilon}\right)^+ = \int_0^t \sum_{n\geq 1} \mathbb{1}_{]\sigma_n^\varepsilon,\tau_n^\varepsilon]}(s) \mathbb{1}_{X_s>0} \,\mathrm{d}X_s + \frac{1}{2} \sum_{n\geq 1} \left(L_{t\wedge\tau_n^\varepsilon}^0 - L_{t\wedge\sigma_n^\varepsilon}^0\right).$$

Notons en particulier que, comme on est loin de 0 dans l'intervalle, $L_{t\wedge\sigma_{n+1}^\varepsilon}^0 = L_{t\wedge\tau_n^\varepsilon}^0$. La somme se télescope donc pour donner $L_t^0(X)$. Naturellement, lorsque $\varepsilon \to 0$, R_ε tend uniformément vers 0. Il reste donc à justifier que l'intégrale converge vers 0 en probabilité pour conclure, et cette propriété est vraie par le théorème de convergence dominée stochastique. □

Proposition 18 :

Si $X = X_0 + V$ est purement à variations finies, alors presque-sûrement, pour tout $a \in \mathbb{R}$ et tout $t \geq 0$, on a $L_t^a(X) = 0$.

Démonstration. On exploite $\langle X, X\rangle = 0$, d'où $\int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(a) L_t^a(X)\,\mathrm{d}a = \int\limits_0^t \varphi(X_s)\,\mathrm{d}\langle X, X\rangle_s = 0$ pour toute fonction φ positive, ce qui conclut la preuve. $\square$

1.5 Temps local du mouvement brownien

Théorème 19 (Trotten) **:**

Soit B un MB. La famille $(L_t^a(B))_{a\in\mathbb{R},t\geq 0}$ a des trajectoires continues en (a,t) et vérifie p.s. que, pour toute fonction $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, $\int\limits_0^t \varphi(B_s)\,\mathrm{d}s = \int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(a) L_t^a(B)\,\mathrm{d}a$. On a de plus les propriétés :

1. Presque-sûrement, pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\mathrm{Supp}(\mathrm{d}_s L_s^a) \subset \{s \geq 0,\ B_s = a\}$.
2. Pour $a \in \mathbb{R}$ fixé, on a p.s. $\mathrm{Supp}(\mathrm{d}_s L_s^a) = \{s \geq 0,\ B_s = a\}$.

Démonstration. Les propriétés préliminaires sont vraies en tant que cas particulier des résultats précédents. Pour le premier point, lorsque $u < v$ et que $t \mapsto B_t$ ne visite pas a sur l'intervalle fermé, alors $L_v^a - L_u^a = \lim \frac{1}{\varepsilon} \int\limits_u^v \mathbb{1}_{[a,a+\varepsilon]}(B_s)\,\mathrm{d}s = 0$.

Pour le second point, désormais, considérons la preuve dans le cas $a = 0$. Pour le cas général, il suffit de réinitialiser le processus en T_a par Markov fort. Montrons ainsi que, presque-sûrement, pour tout $\delta > 0$, on a $L_\delta^0(B) > 0$. On peut montrer le changement d'échelle $L_\delta^0(B) \overset{\mathrm{d}}{=} \sqrt{\delta} L_1^0(B)$, donc les deux variables ont la même probabilité d'être strictement positives, et cette probabilité est naturellement non nulle. Notons $A = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \left\{L_{2^{-n}}^0(B) > 0\right\}$. En tant que limite décroissante d'évènements de même probabilité, on a $P(A) > 0$, mais par le théorème du $0-1$, comme $A \in \mathcal{F}_{0^+}$, on a $\mathbb{P}(A) = 1$. Autrement dit, on a de la masse en 0, qui est dans le support.

Soit alors $q \in \mathbb{Q}^+$ et H_q le temps de premier passage en 0 après q. Posons alors un autre MB $B_t' = B_{H_q+t}$. La propriété ci-avant est à nouveau presque-sûrement vraie, donc H_q est dans le support. Comme $\{H_q,\ q \in \mathbb{Q}^+\}$ est dense dans l'ensemble des zéros de B, et que le support est fermé, on a finalement l'égalité souhaitée. $\square$

Remarque 20 :

Cette seconde propriété ne peut pas être (p.s.) simultanément vérifiée pour tous les $a \in \mathbb{R}$. En effet, si on considère $a_0 = \sup\limits_{0\leq s\leq 1} B_s$, alors p.s. on a un unique instant $0 < t_0 < 1$ tel que $B_{t_0} = a_0$. Alors $t_0 \notin \mathrm{Supp}(\mathrm{d}_s B_s^{a_0})$.

Proposition 21 :

Soit B un MB issu de 0 :

1. Pour T_a le temps d'atteinte de $a > 0$, $L^0_{T_a}(B) \sim \mathcal{E}(2a)$ suit une loi exponentielle,
2. Pour U_a le temps d'atteinte de $\pm a$, $L^0_{U_a}(B) \sim \mathcal{E}(a)$ suit une loi exponentielle.

Démonstration. On va montrer le premier point. Pour $s > 0$, on pose $\tau = \inf\{t \geq 0,\ L^0_t(B) \geq s\}$ le temps d'atteinte de s par L^0_t. C'est un TA, et $B_\tau = 0$. Soit alors $B'_t = B_{t+\tau}$ un MB initialisé en 0, indépendant de $\mathcal{F}_\tau$. Naturellement, $L^0_t(B') = L^0_{t+\tau}(B) - s$. Dans ce cas, sous l'évènement $\{\tau < T_a\} = \left\{L^0_{T_a}(B) \geq s\right\}$, on a $T_a = \tau + T'_a$ où T'_a est le temps d'atteinte de a par B', et donc $L^0_{T'_a}(B) = L^0_{T_a} - s$. Autrement dit, on a montré que la loi de $L^0_{T_a}(B)$ est sans mémoire, donc suit une loi exponentielle.

Cette loi est donc caractérisée par sa moyenne. Par la formule de Tanaka, on a ici l'égalité $(B_{t\wedge T_a})^+ = \int_0^{t\wedge T_a} \mathbb{1}_{B_s>0}\,\mathrm{d}B_s + \frac{1}{2}L^0_{t\wedge T_a}(B)$. En passant à l'espérance, $2\mathbb{E}\left[(B_{t\wedge T_a})^+\right] = \mathbb{E}\left[L^0_{t\wedge T_a}\right]$. Par convergence dominée dans le terme de gauche, et monotone dans le terme de droite, on a finalement $2a = \mathbb{E}\left[L^0_{T_a}\right]$.

Le raisonnement est analogue pour le second point. $\square$

Théorème 22 (Lévy) **:**

Soit $S_t = \sup_{s\in[0,t]} B_s$. Les processus $(S_t, S_t - B_t)_{t\geq 0}$ et $(L^0_t(B), |B_t|)_{t\geq 0}$ ont la même loi.

Démonstration. On part de $|B_t| = \int_0^t \mathrm{sgn}(B_s)\,\mathrm{d}B_s + L^0_t(B)$, par la formule de Tanaka. Notons que $\beta_t := -\int_0^t \mathrm{sgn}(B_s)\,\mathrm{d}B_s$ est également un MB issu de 0. On a donc $|B| = L^0 - \beta$, d'où $\beta \leq L^0$.

Ainsi, $L^0_t(B) = \sup_{0\leq s\leq t} L^0_s \geq \sup_{0\leq s\leq t} \beta_s$. On a en fait égalité. En effet, avec $g_t = \sup\{s \leq t,\ B_s = 0\}$, on a par construction $L^0_t(B) = L^0_{g_t}(B) = \beta_{g_t}$. On peut donc réécrire :

$$\left(L^0_t(B), |B_t|\right)_{t\geq 0} = \left(\sup_{s\leq t}\beta_s, \sup_{s\leq t}\beta_s - \beta_t\right).$$

Cette égalité est en particulier une égalité en loi, d'où le résultat en remplaçant β par B. $\square$

Remarque 23 :

De façon analogue, par symétrie du MB, avec $I_t = \inf_{s\in[0,t]} B_s$, on a $(-I, B - I) \overset{\mathrm{d}}{=} (L^0(B), |B|)$.

Corollaire 24 :

On connait la loi de (S, B), donc celle de $(S, S - B)$. En particulier, $L^0 \overset{\mathrm{d}}{=} S \overset{\mathrm{d}}{=} |B| \overset{\mathrm{d}}{=} S - B$.

Remarque 25 (Inverse du temps local) **:**

Soit $\tau_s = \inf\{t \geq 0,\, L_t^0(B) > s\}$, le temps d'atteinte d'un ouvert par un processus càdlàg. Les trajectoires de $(\tau_s)_{s\geq 0}$ sont aussi càdlàg.

Comme $L_\infty^0(B) = \infty$ p.s. (on obtient ce résultat par scaling), on peut trouver un inverse pour tout temps, $\tau_s < \infty$ pour tout $s \geq 0$.

On a $T_s = \inf\{t \geq 0,\, B_t \geq s\} = \inf\{t \geq 0,\, S_t \geq s\}$, et donc par le théorème de Lévy on a $(\tau_s)_{s\geq 0} \overset{\mathrm{d}}{=} (T_s)_{s\geq 0}$.

Cette loi est à accroissements indépendants, stable d'indice $\frac{1}{2}$ (*i.e.* $(T_{\lambda s})_s \overset{\mathrm{d}}{=} (\lambda^2 T_s)_s$).

La loi de $\tau_s \overset{\mathrm{d}}{=} T_s$ est donc à densité $q_s(t) = \frac{s}{t\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{s^2}{2t}}$.

Proposition 26 :

Soit $D = \{s > 0,\, \tau_{s-} < \tau_s\}$ l'ensemble des points de discontinuité. Alors on a l'égalité $\{t \geq 0,\, B_t = 0\} = \{\tau_s,\, s \geq 0\} \cup \{\tau_{s-},\, s \in D\}$.

De plus, les intervalles $]\tau_{s-}, \tau_s[$ (pour $s \in D$) sont exactement les composantes connexes de $\{t \geq 0,\, B_t \neq 0\}$, les intervalles excursion.

Démonstration. Le point τ_s est un point de croissance à droite, donc $B_{\tau_s} = 0$. Par construction, τ_{s-} est un point de croissance à gauche, donc $B_{\tau_{s-}} = 0$. On a ainsi une inclusion.

Réciproquement, si $B_t = 0$, alors $t \in \mathrm{Supp}(\mathrm{d}_s L_s^0)$. Naturellement, pour tout $\varepsilon > 0$, on a $L_{t-\varepsilon}^0 < L_{t+\varepsilon}^0$, et on intercale L_t^0 au milieu. Si, pour tout $\varepsilon > 0$, on a $L_{t+\varepsilon}^0 > L_t^0$, alors $t = \tau_{L_t^0}$. Sinon, on a forcément $L_{t-\varepsilon}^0 < L_t^0$ pour tout $\varepsilon > 0$, d'où $t = \tau_{L_t^0 -}$.

En outre, si $s \in D$, alors $L_{\tau_s}^0 = L_{\tau_{s-}}^0 = s$, donc $B_t \neq 0$ sur l'intervalle $]\tau_{s-}, \tau_s[$. $\square$

1.6 Théorèmes de Ray-Knight

On va étudier la loi des temps locaux en tant que processus de la variable d'espace.

Définition 27 :

Soient $x \geq 0$ et $l \in \mathbb{N}^*$. On dit que la semi-martingale X à valeurs positives est un carré de processus de Bessel de dimension k, issu de x s'il satisfait une équation du type :

$$X_t = x + 2\int_0^t \sqrt{X_s}\,\mathrm{d}B_s + kt\,.$$

On nomme un tel processus un $BESQ(x, k)$.

Remarque 28 :

On peut montrer que la loi d'un $BESQ(x,k)$ est unique, est entièrement déterminée par l'équation précédente. On exhibera par la suite des formules qui caractérisent cette loi.

Proposition 29 :

Soient $k \geq 1$, et $\left(B^1, \ldots, B^k\right)$ un MB dans $\mathbb{R}^k$, issu de $y \in \mathbb{R}^k$. Alors $X = \|B\|^2 = \sum\limits_{j=1}^{k} \left(B^j\right)^2$ est un $BESQ(x,k)$ pour $x = \|y\|^2$.

Démonstration. On a $\left(B_t^j\right)^2 = y_j^2 + t + 2 \int\limits_0^t B_s^j \, \mathrm{d}B_s^j$. En sommant, $X = x + kt + 2 \sum\limits_{j=1}^{k} \int\limits_0^t B_s^j \, \mathrm{d}B_s^j$. Si on pose $\beta_t = \sum\limits_{j=1}^{k} \int\limits_0^t \frac{B_s^j}{\sqrt{X_s}} \, \mathrm{d}B_s^j$, on vérifie alors que c'est un MB, contre lequel X est un $BESQ(x,k)$. $\square$

Proposition 30 :

Si X est un $BESQ(x,k)$ et $k \geq 2$, alors p.s., pour tout $t \geq 0$, on a $X_t > 0$.

Démonstration. Supposons $0 < \varepsilon < x$ et $k = 2$. On pose alors T_ε le temps d'atteinte de ε par X. Ainsi, $\ln(X_{t \wedge T_\varepsilon}) = \ln(x) + M_t + 2 \int\limits_0^{t \wedge T_\varepsilon} \frac{\mathrm{d}s}{X_s} - \frac{1}{2} \int\limits_0^{t \wedge T_\varepsilon} \frac{\mathrm{d}\langle X, X \rangle_s}{X_s^2}$, pour une certaine martingale locale M. On vérifie que les termes de droite se compensent, donc que $(\ln(X_{t \wedge T_\varepsilon}))$ est une martingale locale initialisée en $\ln(x)$. Si on considère en outre $N > x$, on peut arrêter le processus lorsqu'il atteint ε ou N, ce qui permet finalement de justifier, à la limite, que $\mathbb{P}(T_0 < \infty) = 0$. $\square$

Remarque 31 :
Les processus de Bessel vérifient une propriété de Markov. La loi du processus $(X_{t+r})_{r\geq 0}$ conditionnellement à $(X_s)_{s\leq t}$ est égale à $BESQ(X_t, k)$.

Remarque 32 (Cas $k=0$) **:**
Dans ce cas, on veut avoir $\mathrm{d}X_t = x + 2\sqrt{X_t}\,\mathrm{d}B_t$. On admet que, dans ce cas, on peut construire un processus de loi $BESQ(x,0)$ pour tout $x\geq 0$. En particulier, $BESQ(0,0)$ est le processus nul.

Proposition 33 :
Si $X\sim BESQ(x,0)$, alors X est une martingale. Le temps d'atteinte T_0 de 0 par X est fini p.s. et lorsque $t\geq T_0$, on a $X_t=0$. D'autre part, pour $t\geq 0$ et $\lambda>0$, on a :

$$\mathbb{E}\left[e^{-\lambda X_t}\right] = \exp\left(-\frac{\lambda x}{1+2\lambda t}\right).$$

Démonstration. Pour le second point, on considère maintenant $M_s = \exp\left(-\frac{\lambda X_s}{1+2\lambda(t-s)}\right)$ définie sur l'intervalle $[0,t]$. On peut écrire $M_s = F(s,X_s)$. Alors :

$$\mathrm{d}M_s = \partial_t F(s,X_s)\,\mathrm{d}s + \partial_x F(s,X_s)\,\mathrm{d}X_s + \frac{1}{2}\partial_x^2 F(s,X_s)\,\mathrm{d}\langle X,X\rangle_s\,.$$

En développant les calculs, les termes de gauche et de droite se simplifie, d'où le terme central $\mathrm{d}M_s = \partial_x F(s,X_s)\,\mathrm{d}X_s$, M est une martingale locale. Comme M est borné, c'est donc une vraie martingale. En particulier, $\mathbb{E}[M_t]=\mathbb{E}[M_0]$, ce qui conclut la seconde partie.

Le processus X est naturellement une martingale locale positive, donc une sur-martingale, d'espérance décroissante, majorée par $\mathbb{E}[X_0]=x$. En outre, $\langle X,X\rangle_t = 4\int_0^t X_s\,\mathrm{d}s$, donc en passant à l'espérance on a $\mathbb{E}[\langle X,X\rangle_t]\leq 4xt$, fini en temps fini, d'où une vraie martingale. En outre, $\mathbb{P}(X_t=0) = \lim_{\lambda\to\infty}\mathbb{E}\left[e^{-\lambda X_t}\right] = \exp\left(-\frac{x}{2t}\right) \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 1$. Pour $q\in\mathbb{Q}^+$, par le théorème d'arrêt avec un TA borné :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X_{T_0+q}\mathbb{1}_{T_0\leq t}] &= \mathbb{E}[X_{T_0\wedge t+q}\mathbb{1}_{T_0\leq t}]\\ &= \mathbb{E}[X_{T_0\wedge t}\mathbb{1}_{T_0\leq t}]\\ &= 0\,.\end{aligned}$$

Ainsi, conditionnellement à $\{T_0\leq t\}$ on a $X_{T_0+q}=0$. Ceci est vrai pour tout $t\geq 0$, donc $X_{T_0+q}=0$ p.s. Ceci est vrai pour tout $q\in\mathbb{Q}^+$, donc pour tout paramètre réel par continuité. $\square$

Théorème 34 (Ray-Knight) **:**
Soient B un MB issu de 0, T_1 le temps d'atteinte de 1 par B et $\tau_s = \inf\{t\geq 0,\ L_t^0(B)>s\}$.

1. Le processus $\left(L_{T_1}^{1-a}(B)\right)_{0\leq a\leq 1}$ est un $BESQ(0,2)$ restreint à $[0,1]$.

2. Le processus $\left(L^a_{\tau_s}(B)\right)_{a\geq 0}$ est un $BESQ(s,0)$.

Démonstration. On montrera ici le premier point. Soit $X \sim BESQ(0,2)$. Il nous suffit de montrer que, pour toute fonction $G \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R}^+)$ à support dans $]0,1[$, on a :

$$\mathbb{E}\left[\exp\left(-\int_0^1 G(a) L^{1-a}_{T_1}(B)\,\mathrm{d}a\right)\right] = \mathbb{E}\left[\exp\left(-\int_0^1 G(a) X_a\,\mathrm{d}a\right)\right].$$

On peut alors utiliser ceci pour approcher les distributions $\sum_{i=1}^p \lambda_i \delta_{a_i}$. Ce faisant, cette relation donne une égalité des transformées de Laplace fini-dimensionnelles, donc des lois des processus.

Pour le terme de gauche, par changement de variable $b = 1-a$:

$$\int_0^1 G(a) L^{1-a}_{T_1}(B)\,\mathrm{d}a = \int_{\mathbb{R}} G(1-b) L^b_{T_1}(B)\,\mathrm{d}b = \int_0^{T_1} G(1-B_t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Notons $g(t) = G(1-t)$, et f la solution de $f'' = 2gf$, avec $f(0) = 1$ et $f'(0) = 0$. On obtient ainsi une fonction positive, croissante, convexe. On vérifie, par la formule d'Itô, que $M_t = f(B_t)\exp\left(-\int_0^t g(B_s)\,\mathrm{d}s\right)$ est une martingale locale. Quitte à arrêter M en T_1, le processus obtenu est borné, donc c'est une martingale, et $\mathbb{E}[M_{T_1}] = f(1)\mathbb{E}\left[\exp\left(-\int_0^{T_1} g(B_s)\,\mathrm{d}s\right)\right] = 1$, donc l'espérance de gauche est égale à $\frac{1}{f(1)}$.

Pour le terme de droite, soit $F(x) = f(1-x)$. On a $F'' = 2FG$. Posons $u = \frac{F'}{F} \leq 0$, de sorte que $u' = 2G - u^2$. Soit $N_t = \frac{1}{F(t)}\exp\left(\frac{u(t)X_t}{2} - \int_0^t G(s)X_s\,\mathrm{d}s\right)$.

Admettons que N est une martingale locale. Alors quitte à l'arrêter en 1, on obtient une vraie martingale bornée, d'où $\mathbb{E}[N_0] = \mathbb{E}[N_1]$. On a alors $\mathbb{E}[N_0] = \frac{1}{f(1)}$ d'une part, et d'autre part $\mathbb{E}[N_1] = \mathbb{E}\left[\exp\left(-\int_0^1 G(s)X_s\,\mathrm{d}s\right)\right]$ donc on a bien égalité entre les espérances de gauche et de droite.

Reste donc à justifier que N est bien une martingale locale. On va pour ce faire appliquer la formule d'Itô. On a :

$$\frac{u(t)X_t}{2} - \int_0^t G(s)X_s\,\mathrm{d}s = \frac{1}{2}\int_0^t u'(s)X_s\,\mathrm{d}X_s + \frac{1}{2}\int_0^t u(s)\,\mathrm{d}X_s - \int_0^t G(s)X_s\,\mathrm{d}s\,,$$

et $\mathrm{d}X_s = 2\sqrt{X_s}\,\mathrm{d}B_s + 2\,\mathrm{d}s$. Remarquons en outre que $\frac{1}{F(t)} = \frac{1}{F(0)}\exp\left(-\int_0^t u(s)\,\mathrm{d}s\right)$. Ainsi :

$$\begin{aligned} N_t &= \frac{1}{F(0)}\exp\left(\int_0^t u(s)\sqrt{X_s}\,\mathrm{d}B_s + \frac{1}{2}\int_0^t X_s u'(s)\,\mathrm{d}s - \int_0^t G(s)X_s\,\mathrm{d}s\right) \\ &= \frac{1}{F(0)}\exp\left(\int_0^t u(s)\sqrt{X_s}\,\mathrm{d}B_s + -\frac{1}{2}\int_0^t u(s)^2 X_s\,\mathrm{d}s\right). \end{aligned}$$

En posant $U_t = \int_0^t u(s)\sqrt{X_s}\,\mathrm{d}B_s$, on peut réécrire $N_t = \frac{1}{F(0)}\exp\left(U_t - \frac{\langle U,U\rangle_t}{2}\right)$, ce qui met en évidence le fait que c'est une martingale locale. □

Définition 35 :
Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$. On dit que $t_0 > 0$ est un *point de croissance* de f lorsqu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $t \in]t_0 - \varepsilon, t_0[$, on a $f(t) < f(t_0)$ et pour tout $t \in]t_0, t_0 + \varepsilon[$, $f(t) > f(t_0)$.

Théorème 36 (Dvoretsky, Erdős, Kakutani) **:**
Presque-sûrement, la fonction $t \mapsto B_t$ n'a pas de point de croissance.

Démonstration. Montrons une propriété légèrement différente : il n'existe aucun $t_0 \in]0, T_1[$ tel que pour tout $t \in [0, t_0[$ on a $B_t < B_{t_0}$ et pour $t \in]t_0, T_1]$ on a $B_t > B_{t_0}$. On peut, à partir de cette propriété, retrouver l'énoncé du théorème.

Supposons qu'il existe un tel t_0, et notons $x_0 = B_{t_0} \in]0, 1[$. Dans ce cas, a fortiori, $L^{x_0}_{T_1}(B) = 0$. Ceci contredit le premier point de Ray-Knight, qui dit que pour tout $0 < a < 1$, et donc pour x_0 en particulier, on a $L^a_{T_1}(B) > 0$ presque-sûrement. □

1.7 Théorèmes de Ray-Knight et marches aléatoires

Définition 37 :
Soit $S = (S_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ une marche aléatoire simple, issue de 0, avec des transitions $\xi_k \overset{\text{iid}}{\sim} \mathcal{U}(\pm 1)$. Une excursion *positive* est une trajectoire de la marche de longueur finie, valant 0 aux extrémités et à valeurs intermédiaires dans $\mathbb{N}^*$.

On peut naturellement définir le temps d'arrêt T_n comme la fin de la n-ième excursion positive. On note alors N^n_j le nombre de montée de j à $j+1$ avant T_n. En particuliern $N^n_0 = n$.

Proposition 38 :
Le processus $\left(N^n_j\right)_{j\geq 0}$ est un processus de Galton-Watson, muni de la loi de reproduction $\nu(i) = \frac{1}{2^{i+1}}$, issu de n.

Démonstration. Il est clair que les excursions ont la même loi et sont indépendantes. Il suffit donc d'établir la propriété de branchement pour $n = 1$. On a une correspondance bijective entre les excursions et les arbres planaires, via la transformée de Lamperti. La probabilité d'obtenir un arbre planaire T donné avec Galton-Watson est $\prod_{u\in T} \nu(k_u)$ où k_u est le nombre d'enfants de l'individu u. Ici, cela donne $2^{-\sum_u k_u - N} = 2^{1-2N}$, où N est le nombre d'individus. On constate que c'est précisément la probabilité d'observer l'excursion correspondante, de longueur $2N$, où la seule transition imposée est la première. Cette correspondance en loi conclut la démonstration. $\square$

Proposition 39 (Diffusion de Feller) **:**

On a la convergence en loi de $\left(\frac{2}{n}N^n_{\lfloor nt\rfloor}\right)_{t\geq 0}$ vers X un $BESQ(2,0)$, au sens des marginales fini-dimensionnelles.

Démonstration. On peut montrer, à $t>0$ fixé, que $\mathbb{E}\left[e^{-\lambda\frac{2}{n}N^n_{\lfloor nt\rfloor}}\right] \longrightarrow \mathbb{E}\left[e^{-\lambda X_t}\right] = \exp\left(-\frac{2\lambda}{1+2\lambda}\right)$. En effet, en tant que fonction génératrice, par propriété de branchement, le terme de gauche est égal à $\mathbb{E}\left[e^{-\lambda\frac{2}{n}N^1_{\lfloor nt\rfloor}}\right]^n =: g_{\lfloor nt\rfloor}\left(e^{-\frac{2\lambda}{n}}\right)^n$. En outre, $g_k = g_1\circ\cdots\circ g_1$ est la composition itérée k fois, et $g_1(r) = \frac{1}{2-r}$. On peut vérifier que $g_k(r) = \frac{k-(k-1)r}{k+1-kr}$ sur $[0,1]$. On effectue alors un développement limité de $g_{\lfloor nt\rfloor}\left(e^{-\frac{2\lambda}{n}}\right)^n$ pour conclure. $\square$

Remarque 40 (Application à la seconde propriété de Ray-Knight) **:**

Le théorème de Donsker nous donne la convergence en loi de $\left(\frac{1}{n}S_{\lfloor n^2t\rfloor}\right)_{t\geq 0}$ vers B. On peut en fait établir la convergence en loi suivante :

$$\left(\left(\frac{1}{n}S_{\lfloor n^2t\rfloor}\right)_{t\geq 0}, \frac{1}{n^2}T_n\right) \rightharpoonup (B,\tau_2)\,.$$

Ainsi, pour $g\in\mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ à support compact inclus dans $\mathbb{R}^+$, cette convergence en loi implique :

$$\int_0^{\frac{1}{n^2}T_n} g\left(\frac{1}{n}S_{\lfloor n^2t\rfloor}\right)\mathrm{d}t \rightharpoonup \int_0^{\tau_2} g(B_t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\infty} g(a)L^a_{\tau_2}(B)\,\mathrm{d}a\,.$$

En effet, on peut réécrire le terme de gauche :

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{1}{n^2}T_n} g\left(\tfrac{1}{n}S_{\lfloor n^2t\rfloor}\right)\mathrm{d}t &= \sum_{k=0}^{T_n-1}\int_{\frac{k}{n^2}}^{\frac{k+1}{n^2}} g\left(\tfrac{1}{n}S_k\right)\mathrm{d}t\\
&= \tfrac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{T_n-1} g\left(\tfrac{1}{n}S_k\right)\\
&= \tfrac{1}{n^2}\sum_{j=1}^{\infty} g\left(\tfrac{j}{n}\right)\left(N^n_j + N^n_{j-1}\right)\\
&= \int_0^{\infty} g\left(\frac{\lfloor na\rfloor}{n}\right)\left(\frac{N^n_{\lfloor na\rfloor}+N^n_{\lfloor na\rfloor-1}}{n}\right)\mathrm{d}a\,.
\end{aligned}$$

Remarque 41 :

Grâce au MB B, on peut inversement construire une marche aléatoire simple S. On considère ainsi $\sigma_0^n = 0$ et $\sigma_{k+1}^n = \inf\left\{t \geq \sigma_k^n,\ \left|B_t - B_{\sigma_k^n}\right| = \frac{1}{n}\right\}$. Le processus $S^n = \left(nB_{\sigma_k^n}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est ainsi la marche aléatoire attendue. On a dans ce cas la convergence presque-sûre de $\frac{1}{n}S^n_{\lfloor n^2 t\rfloor}$ vers B_t.

2 Théorie des excursions

2.1 Rappels sur les mesures de Poisson

2.1.1 Mesures de Poisson

Définition 42 :
Soit $(S, \mathcal{S})$ un espace mesurable. On se place sur l'espace :

$$M_p(S) = \left\{ \sum_{i \in I} x_i,\ I \text{ fini ou dénombrable, } x \in S^I \right\},$$

muni de la tribu qui rend mesurables les applications $\nu \mapsto \nu(A)$ pour tout $A \in \mathcal{S}$.

Définition 43 :
Soit μ une mesure σ-finie sur S. La mesure de Poisson d'intensité μ est la variable aléatoire N, à valeurs dans $M_p(S)$, telle que :
- Pour tout mesurable $A \in \mathcal{S}$, on a $N(A) \sim \mathcal{P}(\mu(A))$ qui suit une loi de Poisson.
- Si $A_1, \dots, A_p \in \mathcal{S}$ sont deux à deux disjoints, alors les variables $N(A_1), \dots, N(A_p)$ sont indépendantes.

Théorème 44 :
On peut toujours construire une telle mesure de Poisson, d'intensité μ.

Remarque 45 :
Si $S = \mathbb{R}^+$, et $\mu = \lambda \mathrm{Leb}$ est proportionnel à la mesure de Lebesgue, alors $N_t = N([0, t])$ correspond au processus de Poisson de paramètre λ.

Proposition 46 (Formule du premier moment) **:**
Pour $f : S \to \overline{\mathbb{R}^+}$ mesurable, on a $\mathbb{E}\big[\int f(x)\,\mathrm{d}N(x)\big] = \int f(x)\,\mathrm{d}\mu(x)$.

Proposition 47 (Formule exponentielle) **:**
Pour $f : S \to \overline{\mathbb{R}^+}$ mesurable, on a $\mathbb{E}\big[\exp\big(-\int f(x)\,\mathrm{d}N(x)\big)\big] = \exp\big(-\int \big(1 - e^{-f(x)}\big)\,\mathrm{d}\mu(x)\big)$.

2.1.2 Processus Ponctuel de Poisson

Définition 48 :

Soit $(E, \mathcal{E})$ mesurable, et μ une mesure σ-finie sur E. Le PPP de mesure caractéristique μ est la mesure de Poisson sur $\mathbb{R}^+ \times E$, pour l'intensité $\text{Leb} \otimes \mu$.

Pour $t \in \mathbb{R}^+$ et $A \in \mathcal{E}$, on note en particulier $N_t(A) = N([0, t] \times A)$.

Les formules du premier moment et exponentielle s'appliquent naturellement dans ce cas.

Proposition 49 :

La variable N à valeurs dans $M_p(\mathbb{R}^+ \times E)$ suit la loi $PPP(\mu)$ ssi les propriétés suivantes sont vérifiées :

1. Pour tout $A \in \mathcal{E}$ tel que $\mu(A) < \infty$, le processus $(N_t(A))$ est un processus de Poisson de paramètre $\mu(A)$.
2. Pour tous $(A_i)_{i \leq p}$ disjoints, les processus $((N_t(A_i))_t)_{i \leq p}$ sont indépendants.

Démonstration. Si on a un processus ponctuel, ces deux propriétés en découlent naturellement. Pour le sens réciproque, notons qu'il suffit d'établir la formule exponentielle pour conclure, car elle caractérise en fait la loi.

Par densité, il suffit de le montrer pour f à support dans $[0, K] \times A$ avec $\mu(A) < \infty$. On considère ainsi $f = \mathbb{1}_H$ avec $H =]s, t] \times B$. Dans ce cas :

$$\int \mathbb{1}_H(r, x) \, \mathrm{d}N(r, x) = N_t(B) - N_s(B) \, ,$$

donc en passant à l'espérance on obtient bien $(t - s)\mu(B)$. Par un lemme de classes monotones, on obtient donc la formule du premier moment.

Pour la formule exponentielle, on peut obtenir l'égalité souhaitée pour les fonctions de la forme $f = \sum_{i,j} \alpha_{i,j} \mathbb{1}_{]t_j, t_{j+1}] \times B_i}$, avec (t_j) croissante et les (B_i) disjoints. à nouveau en utilisant nos hypothèses sur N.

Les fonctions de cette forme sont denses dans $L^1([0, K] \times A \to \mathbb{R}^+, \text{Leb} \otimes \mu)$. Si on approche f par de telles fonctions f_n, on vérifie alors que les termes de gauche et de droite de la formule exponentielle pour f sont approchés par ceux pour les f_n, d'où le résultat. $\square$

Remarque 50 :

Presque-sûrement, pour tout $t \geq 0$, on $N(\{t\} \times E) \leq 1$.

Remarque 51 :

Le processus $(X_t)_{t \geq 0}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ est un processus adapté à accroissements indépendants et stationnaires (PAIS) par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ si, pour tous $0 \leq s \leq t$, on a $X_t - X_s$ indépendant de $\mathcal{F}_s$, dont la loi ne dépend que de $t - s$.

Sauf mention explicite, la filtration est implicitement $\mathcal{F}_t = \sigma(X_s, s \leq t)$.

Définition 52 :
On dit que $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{N}$ est une fonction de comptage si on a une décomposition :

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{1}_{[t_k,\infty[}\,,$$

avec une suite (t_k) strictement croissante.

Théorème 53 :
Soit N un PAIS, dont les trajectoires sont des fonctions de comptage. Alors c'est un processus de Poisson.

Démonstration. Montrons qu'il existe une constante C telle que $\mathbb{P}(N_t \geq 1) \leq Ct$.

Si ce n'était pas le cas, on aurait une suite $\varepsilon_k \to 0$ telle que $\frac{1}{\varepsilon_k} P(N_{\varepsilon_k} \geq 1) \to \infty$. On peut décomposer $N_1 \geq \sum_{j=0}^{\left\lfloor \frac{1}{\varepsilon_k} \right\rfloor - 1} \left(N_{(j+1)\varepsilon_k} - N_{j\varepsilon_k}\right)$. Ces variables sont iid, de loi N_{ε_k}, donc convergent en probabilité vers ∞, ce qui contredit la finitude de N_1.

Montrons maintenant que $\mathbb{P}(N_t \geq 2) = O(t^2)$. Pour ce faire, remarquons que cette grandeur est la limite croissante de $\mathbb{P}\left(\bigcup_{0<i<j\leq 2^n} \left\{N_{\frac{i\varepsilon}{2^n}} - N_{\frac{(i-1)\varepsilon}{2^n}}\right\} \cap \left\{N_{\frac{j\varepsilon}{2^n}} - N_{\frac{(j-1)\varepsilon}{2^n}}\right\}\right)$, qu'on majore par $2^{2n}\mathbb{P}\left(N_{\frac{\varepsilon}{2^n}} \geq 1\right)^2$, d'où le résultat voulu via le premier point.

En outre, pour $0 < r \leq 1$, on obtient $\mathbb{E}\left[r^{X_t}\right] = \mathbb{E}\left[r^{X_{t/n}}\right]^n$. À la limite, on a finalement $\mathbb{E}\left[r^{X_t}\right] = e^{-(1-r)l(t)}$. En outre, on vérifie que $l(t+s) = l(t) + l(s)$, donc on obtient une constante λ telle que $\mathbb{E}\left[r^{X_t}\right] = \frac{e^{\lambda t}}{e^{\lambda}}$. $\square$

Théorème 54 :
Soient $N^1, \ldots, N^p$ des processus de Poisson, de paramètres $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$.

Supposons que le processus $(N_t^1, \ldots, N_t^p)_{t\geq 0}$ est un PAIS, et que N^i et N^j n'ont pas d'instant de saut en commun si $i \neq j$. Alors les processus $N^1, \ldots, N^p$ sont indépendants.

Démonstration. Admis. $\square$

2.1.3 Premier point dans un ensemble

Proposition 55 :
Soient N un $PPP(\mu)$ sur E, et $A \in \mathcal{E}$ tel que $0 < \mu(A) < \infty$, et $T := \inf\{t \geq 0,\ N_t(A) \geq 1\}$.

Dans ce cas, il existe une variable e_T, à valeurs dans A, telle que pour tout $B \in \mathcal{E}$, on a $N(\{T\} \times B) = \delta_{e_T}(B) = \mathbb{1}_B(e_T)$.

La loi de e_T est la probabilité conditionnelle $\mu_A(B) = \frac{\mu(A\cap B)}{\mu(A)}$, indépendamment de T.

Démonstration. On a $N(\{T\} \times A) = N_T(A) - N_{T-}(A) = 1$, donc $N|_{\{T\}\times E}$ induit une mesure de Dirac sur E, à support dans A, donc un élément $e_T \in A$.

Soit $B \subset A$. On a $\{e_T \in B\} = \{N_T(B) \geq 1\}$. En conséquence, $\mathbb{P}(e_T \in B)$ est la probabilité qu'on ait un saut dans B avant d'avoir un saut dans $A\backslash B$. Par indépendance des processus $(N_t(B))_t$ et $(N_t(A\backslash B))_t$, on a finalement $\mathbb{P}(e_T \in B) = \frac{\mu(B)}{\mu(A)}$, d'où la distribution conditionnelle souhaitée pour e_T.

Reste à établir l'indépendance entre T et e_T. Pour ce faire, fixons un instant $t \geq 0$. On a $\mathbb{P}(T > t, e_T \in B) = \mathbb{P}(T > t)\mathbb{P}(e_T \in B)$. En effet, considérons T' le premier saut dans A après t. Conditionnellement à $\{T > t\}$, on a $T' = T$. En outre, $e_{T'}$ a naturellement la même loi que e_T, et est indépendant de $\{T > t\}$, d'où le résultat. □

2.2 Théorème d'Itô

Remarque 56 :

Soient B un MB, $(L_t^0(B))_{t\geq 0}$ son temps local en 0. On a $\tau_s = \inf\{t \geq 0,\ L_t^0(B) > s\}$. Soit alors $D = \{s > 0,\ \tau_{s-} < \tau_s\}$. Les intervalles $]\tau_{s-}, \tau_s[$ pour $s \in D$ sont les composantes connexes de $\{t \geq 0,\ B_t \neq 0\}$.

Définition 57 :

Pour $s \in D$, on pose $e_s(t) = \mathbb{1}_{[0,\tau_s - \tau_{s-}]} \times B_{\tau_{s-}+t}$. Les trajectoires de e_s sont des fonctions continues f, avec un seuil $\sigma(f)$ tel que $f(t) \neq 0$ ssi $0 < t < \sigma(f)$. Notons E l'espace de ces fonctions, muni des la tribu qui rend mesurables les évaluations $e \mapsto e(t)$.

Théorème 58 :

La mesure aléatoire $N = \sum\limits_{s\in D} \delta_{(s,e_s)}$ est un processus ponctuel de Poisson sur $\mathbb{R}^+ \times E$.

Sa mesure caractéristique M est appelée la mesure d'Itô des excursions Browniennes.

Démonstration. Soit $E_\delta = \{e \in E,\ \|e\|_\infty > \delta\}$. On rappelle que $N_t(A) = N([0,t] \times A)$. En d'autres termes, N_t est une mesure sur E.

Si $A \subset E_\delta$ est mesurable, presque-sûrement, pour tout $t \geq 0$, on a $N_t(A) < \infty$, par uniforme continuité des trajectoires de B sur tout compact. Les trajectoires de $(N_t(A))_{t\geq 0}$ sont en outre des fonctions de comptage. Le processus est adapté à la filtration $(\mathcal{G}_s = \mathcal{F}_{\tau_s})_{s\geq 0}$. Le processus B^{τ_s} est une $(\mathcal{G}_s)_{s\geq 0}$-martingale, et $N_s(A)$ est une fonction de ce processus.

Posons $B'_u = B_{u+\tau_t}$. Le processus B' est un MB indépendant de $\mathcal{F}_{\tau_t} = \mathcal{G}_t$. Dans ce cas, $N_{t+r}(A) - N_t(A)$ est en fait le nombre d'excursions de B' qui tombent dans A avant τ'_r.

Autrement dit, on a vérifié que $(N_t(A))$ est un PAIS, dont les trajectoires sont des fonctions de comptage, donc par un des théorèmes précédents, c'est un processus de Poisson, de paramètre $M(A)$, de sorte que $\mathbb{E}[N_t(A)] = tM(A)$.

Par convergence monotone, on peut étendre M à $\mathcal{E}$ tout entier, d'où finalement une mesure σ-finie M, telle que $M(E_\delta) < \infty$.

Pour $A_1, \ldots, A_p$ de mesures finies sous M et disjoints, les instants de saut sont naturellement distincts, et $(N_t(A^1), \ldots, N_t(A^p))_{t\geq 0}$ est un PAIS, donc les processus $(N_t(A^j))_{t\geq 0}$ sont en fait indépendants par théorème.

En mettant ces deux propriétés bout-à-bout, on a ainsi établi le résultat voulu. □

Remarque 59 :

Par symétrie, on peut décomposer $M = M_+ + M_-$, à support sur les excursions positives pour M_+ et négatives pour M_-.

On peut passer de la mesure M_+ à M_- et inversement via l'involution $e \mapsto -e$ sur E.

2.3 Propriétés de la mesure d'Itô

Proposition 60 :
Soit $s > 0$. Alors $\tau_s = \int \mathbb{1}_{[0,s]}(r)\sigma(e)\,\mathrm{d}N(r,e)$. On en déduit :

$$\mathbb{E}\left[e^{-\lambda\tau_s}\right] = \exp\left(-s\int\left(1-e^{-\lambda\sigma(e)}\right)\mathrm{d}M(e)\right),$$

d'où $\int\left(1-e^{-\lambda\sigma(e)}\right)\mathrm{d}M(e) = \sqrt{2\lambda}$.

Démonstration. Partons de $\tau_s = \int_0^{\tau_s} \mathbb{1}_{B_t\neq 0}\,\mathrm{d}t$, car $\mathbb{1}_{B_t\neq 0}$ est presque-sûrement égal à 1. On peut donc réécrire :

$$\tau_s = \mathrm{Leb}(\{t\leq\tau_s,\ B_t\neq 0\}) = \sum_{r\leq s}(\tau_r-\tau_{r^-}) = \sum_{r\leq s}\sigma(e_r) = \int\sigma(e)\mathbb{1}_{r\leq s}\,\mathrm{d}N(r,e)\,.$$

On exploite alors $\mathbb{E}\left[\exp\left(-\int f(r,e)\,\mathrm{d}N(r,e)\right)\right] = \exp\left(-\int_0^\infty \mathrm{d}r\int\mathrm{d}M(e)\left(1-e^{-f(r,e)}\right)\right)$, vraie dans un cadre plus général, pour conclure. □

Définition 61 :
Soit $\lambda > 0$. On définit l'opérateur $\theta_\lambda : E\to E$ via $\theta_\lambda(e) : t\mapsto \lambda e\left(\frac{t}{\lambda^2}\right)$. C'est un opérateur de changement d'échelle.

Remarque 62 :
Cet opérateur un plus généralement un sens sur les fonctions mesurables. En particulier, $\theta_\lambda(B)\overset{\mathrm{d}}{=} B$ est encore un mouvement brownien.

Proposition 63 :
La mesure image de M par θ_λ est λM.

Démonstration. Soit $B' = \theta_\lambda(B)$. On a $L_t^0(B') = \lambda L^0_{t/\lambda^2}(B)$, $\tau'_s = \lambda^2\tau_{s/\lambda}$, ainsi que l'ensemble $D' = \left\{s,\ \tau'_{s-} < \tau'_s\right\} = \lambda D$. Si $s\in D'$ on a enfin $e'_s = \theta_\lambda\left(e_{s/\lambda}\right)$.

Dans ce cas, avec $s = \lambda r$:

$$M(A) = \mathbb{E}\left[\sum_{s\leq 1, s\in D'}\mathbb{1}_A(e'_s)\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{r\leq\frac{1}{\lambda}, r\in D}\mathbb{1}_A(\theta_\lambda(e_r))\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{r\leq\frac{1}{\lambda}, r\in D}\mathbb{1}_{\theta_\lambda^{-1}(A)}(e_r)\right] = \frac{1}{\lambda}M\left(\theta_\lambda^{-1}(A)\right),$$

d'où le résultat. $\square$

Proposition 64 :

Soit $h(e) = \sup_{t\geq 0} e(t)$ la hauteur d'une excursion positive. Pour tout $x > 0$ on a :

$$M(\{h(e) \geq x\}) = M_+(\{h(e) \geq x\}) = \frac{1}{2x}\,,$$

et :

$$M(\{\sigma(e) \geq x\}) = 2M_+(\{\sigma(e) \geq x\}) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\,.$$

Démonstration. Par changement d'échelle on a :

$$M(\{h(e) \geq x\}) = M\left(\left\{\frac{1}{x}h(e) \geq 1\right\}\right) = M\left(h\left(\theta_{\frac{1}{x}}(e)\right) \geq 1\right) = \frac{1}{x}M(\{h(e) \geq 1\})\,.$$

Ceci nous donne le facteur $\frac{1}{x}$, reste à expliciter la valeur de la constante $C = M(\{h(e) \geq 1\})$. On a :

$$\begin{aligned} e^{-C} &= \mathbb{P}(\text{Pas d'excursion de hauteur} \geq 1 \text{ avant } \tau_1) \\ &= \mathbb{P}(S_{\tau_1} < 1) = \mathbb{P}(\tau_1 < T_1) \\ &= \mathbb{P}\left(L^0_{T_1}(B) > 1\right), \end{aligned}$$

et cette variable suit une loi $\mathcal{E}\left(\frac{1}{2}\right)$, d'où $e^{-C} = e^{-\frac{1}{2}}$, ce qui conclut le raisonnement.

Par un changement d'échelle analogue, on ramène l'autre mesure sous la forme $\frac{C'}{\sqrt{x}}$, puis on calcule explicitement C'. $\square$

Proposition 65 :

Soit $t \geq 0$. On pose $\Lambda_t(\varepsilon)$ le nombre d'excursions telles que $\sigma(e) > \varepsilon$ avant l'instant t.

Alors $\sqrt{\frac{\pi\varepsilon}{2}}\Lambda_t(\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon\to 0^+]{\text{p.s.}} L^0_t(B)$.

Démonstration. On a $\Lambda_{\tau_s}(\varepsilon) = N([0,s] \times \{e,\, \sigma(e) > \varepsilon\})$.

Considérons les $\varepsilon_k = \frac{2}{\pi k^2}$, et $\varepsilon_0 = \infty$. On réécrit :

$$\Lambda_{\tau_s}(\varepsilon_k) = \sum_{j=1}^{k} N([0,s] \times \{e,\, \varepsilon_j < \sigma(e) \leq \varepsilon_{j-1}\})\,.$$

Ce faisant, par la proposition précédente, on a pris les ε de sorte que $M(\{\varepsilon_k < \sigma(e) \leq \varepsilon_{k-1}\}) = 1$. On somme donc des variables de Poisson indépendantes, de paramètre s. Par la loi forte des grands nombres :

$$\frac{1}{k}\Lambda_{\tau_s}(\varepsilon_k) \xrightarrow{\text{p.s.}} s\,.$$

Comme $\varepsilon \mapsto \Lambda_{\tau_s}(\varepsilon)$ est décroissante, en notant que $\frac{1}{k} = \sqrt{\frac{\pi\varepsilon_k}{2}}$, on a plus généralement la convergence souhaitée lorsque $\varepsilon \to 0$.

Notons en outre que $L^0_{\tau_s}(B) = s$ par construction. On a ainsi établi le résultat pour tout instant τ_s. On étend le résultat à tout instant t par encadrement. □

2.4 Descriptions de la mesure d'Itô

Définition 66 :

On généralise l'ensemble E en E^* l'ensemble des fonctions $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$, munies d'un seuil $\sigma(f)$ tel que f ne s'annule pas sur $]0, \sigma(f)[$ puis est nulle sur $[\sigma(f), \infty[$.

On n'impose ici pas la valeur en 0. Ainsi, $E = \{f \in E^*,\ f(0) = 0\}$.

On munit E^* de la métrique $d f, g = \|f - g\|_\infty + |\sigma(f) - \sigma(g)|$.

Définition 67 :

Soit $\varepsilon > 0$. On définit $\Phi_\varepsilon : \{e \in E,\ h(e) \geq \varepsilon\} \to E^*$ via $\Phi_\varepsilon[e] : t \mapsto e(T_\varepsilon(e) + t)$, avec le temps d'atteinte $T_\varepsilon(e) = \inf\{t \geq 0,\ e(t) = \varepsilon\}$.

Définition 68 :

Soit B^ε un mouvement brownien issu de ε, et T_0^ε le temps d'atteinte de 0. On considère alors $\mathbb{P}^*_\varepsilon$ la mesure sur E^* induite par le processus $\left(B^\varepsilon_{t \wedge T_0^\varepsilon}\right)_{t \geq 0}$.

Théorème 69 :

La loi de $\Phi_\varepsilon(e)$ sous la mesure conditionnelle $M_+(\cdot | h(e) \geq \varepsilon)$ est $\mathbb{P}^*_\varepsilon$.

De plus, $\frac{1}{2\varepsilon}\mathbb{P}^*_\varepsilon \to M_+$ dans un sens faible, contre toute fonction $F \in \mathcal{C}^0_b(E^*, \mathbb{R})$ pour laquelle il existe un seuil $\delta > 0$ tel que, si $\sigma(e) < \delta$, alors $F(e) = 0$.

Démonstration. Soient $G_\varepsilon = \tau_{L_{T^0_\varepsilon}(B)-}$ et $D_\varepsilon = \tau_{L_{T^0_\varepsilon}(B)}$, ainsi que $e_{L_{T^0_\varepsilon}(B)} = \left(B_{(G_\varepsilon + t) \wedge D_\varepsilon}\right)_{t \geq 0}$. Les variables G et D correspondent aux bords gauche et droite de la première excursion de B qui dépasse la hauteur ε. Cette excursion a donc la loi M conditionnée par la hauteur. En outre, par Markov fort, $\Phi_\varepsilon\left(e_{L_{T^0_\varepsilon}(B)}\right) = \left(B_{(\varepsilon + t) \wedge D_\varepsilon}\right)_{t \geq 0}$ suit bien la loi $\mathbb{P}^*_\varepsilon$.

Pour la seconde partie, partons de :

$$\frac{1}{2\varepsilon}\mathbb{E}_{\mathbb{P}^*_\varepsilon}[F] = \frac{1}{2\varepsilon}M_+(F(\Phi_\varepsilon(e)) | \{h(e) \geq \varepsilon\}) = M_+\left(F(\Phi_\varepsilon(e))\mathbb{1}_{h(e) \geq \varepsilon}\right).$$

On peut ajouter $\mathbb{1}_{\sigma(e) \geq \delta}$ dans cette intégrale sans changer sa valeur. La mesure $\mathbb{1}_{\sigma(e) \geq \delta}\, \mathrm{d}M_+(e)$ est *finie*, donc on peut maintenant le théorème de convergence dominée, pour obtenir la limite $M_+\left(F \mathbb{1}_{\sigma(e) \geq \delta}\right) = M_+(F)$. □

Théorème 70 :

Soit $t>0$. Sous la loi $M_+(\cdot|\{\sigma(e)>t\})$, conditionnellement à $e(t)$, le processus $(e(t+r))_{r\geq 0}$ est alors indépendant de $(e(r))_{r\leq t}$, et de loi $\mathbb{P}^*_{e(t)}$.

De plus, $e(t)$ a la densité $q_t(x)=\frac{x}{t\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{x^2}{2t}}\mathbb{1}_{x>0}$ contre la mesure $M_+(\cdot\cap\{\sigma(e)>t\})$.

Démonstration. Soient $\varphi\in\mathcal{C}^0_b(\mathbb{R}^+,\mathbb{R}^+)$, $\Phi\in\mathcal{C}^0_b(\mathcal{C}^0([0,t],\mathbb{R}),\mathbb{R}^+)$ et $\Psi\in\mathcal{C}^0_b(E^*,\mathbb{R}^+)$. Pour établir le premier point, il nous suffit de montrer que :

$$M_+\big(\Phi\big((e(r))_{r\leq t}\big)\varphi(e(t))\Psi\big((e(t+r))_{r\geq 0}\big)\mathbb{1}_{\{\sigma(e)>t\}}\big)=M_+\Big(\Phi\big((e(r))_{r\leq t}\big)\varphi(e(t))\mathbb{E}_{\mathbb{P}^*_{e(t)}}[\Psi]\mathbb{1}_{\{\sigma(e)>t\}}\Big)\,.$$

Quitte à supposer $\varphi(0)=0$, on peut oublier le facteur $\mathbb{1}_{\{\sigma(e)>t\}}$.

Le terme de gauche, par le théorème précédent, peut être vu comme la limite en $\varepsilon\to 0$ de :

$$\begin{aligned}&\tfrac{1}{2\varepsilon}\textstyle\int\Phi(f(r),\,r\leq t)\varphi(f(t))\Psi(f(t+r),\,r\geq 0)\,\mathrm{d}\mathbb{P}^*_\varepsilon(f)\\ =\;&\tfrac{1}{2\varepsilon}\mathbb{E}\Big[\mathbb{1}_{T_0^\varepsilon\geq t}\Phi(B^\varepsilon_r,\,r\leq t)\varphi(B^\varepsilon_t)\Psi\Big(B^\varepsilon_{(t+r)\wedge T_0^\varepsilon},\,r\geq 0\Big)\Big]\,.\end{aligned}$$

Dans cette nouvelle écriture, le terme de gauche est bien $\mathcal{F}_t$-mesurable, donc en appliquant la propriété de Markov faible en l'instant t on obtient :

$$=\;\tfrac{1}{2\varepsilon}\mathbb{E}\Big[\mathbb{1}_{T_0^\varepsilon\geq t}\Phi(B^\varepsilon_r,\,r\leq t)\varphi(B^\varepsilon_t)\mathbb{E}_{\mathbb{P}^*_{B^\varepsilon_t}}[\Psi]\Big]\,.$$

On peut remonter les calculs à partir de cette nouvelle expression, pour obtenir le résultat voulu. Pour justifier le passage à la limite cette fois-ci, il faut simplement préciser que $x\mapsto\mathbb{E}_{\mathbb{P}^*_x}[\Psi]$ est aussi continue.

Pour établir la densité de $e(t)$, rappelons que $(S,B)_t$ a pour densité :

$$\mathcal{G}_t(a,b)=2\frac{2a-b}{t\sqrt{2\pi t}}\exp\bigg(-\frac{(2a-b)^2}{2t}\bigg)\mathbb{1}_{a\geq 0,\,a\geq b}\,,$$

contre la mesure de Lebesgue. En posant $I^\varepsilon_t:=\inf_{s\leq t}B^\varepsilon_s$, le couple $(I^\varepsilon_t,B^\varepsilon_t)\overset{\mathrm{d}}{=}(\varepsilon-S_t,\varepsilon-B_t)$ a donc pour densité $\mathcal{G}_t(\varepsilon-a,\varepsilon-b)$.

Soit $\varphi\in\mathcal{C}^0_b(\mathbb{R}^+,\mathbb{R}^+)$ nulle en 0. Dans ce cas :

$$\begin{aligned}M_+\big(\varphi(e(t))\mathbb{1}_{\{\sigma(e)>t\}}\big)&=M_+(\varphi(e(t)))\\&=\lim_{\varepsilon\to 0}\tfrac{1}{2\varepsilon}\mathbb{E}_{\mathbb{P}^*_\varepsilon}[\varphi(e(t))]\\&=\lim_{\varepsilon\to 0}\tfrac{1}{2\varepsilon}\mathbb{E}\Big[\varphi\Big(B^\varepsilon_{t\wedge T_0^\varepsilon}\Big)\Big]\\&=\lim_{\varepsilon\to 0}\tfrac{1}{2\varepsilon}\mathbb{E}\big[\varphi(B^\varepsilon_t)\mathbb{1}_{t<T_0^\varepsilon}\big]\\&=\lim_{\varepsilon\to 0}\tfrac{1}{2\varepsilon}\mathbb{E}\big[\varphi(B^\varepsilon_t)\mathbb{1}_{I^\varepsilon_t>0}\big]\,.\end{aligned}$$

Ce faisant, on a fait apparaitre (I,B) évalué en t, donc on connaît la densité. Reste à conclure en passant à la limite $\varepsilon\to 0$ à nouveau. $\square$

Définition 71 :

Soient $p_t(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-x^2/2t}$ définie pour $x \in \mathbb{R}$ et $t > 0$. On pose $p_t^*(x,y) = p_t(y-x) - p_t(y+x)$ défini pour $x, y > 0$.

Corollaire 72 :

Soient $0 < t_0 < \cdots < t_k$. La famille $e(e(t_0), \ldots, e(t_k))$ a pour densité :

$$h(y_0, \ldots, y_k) = q_{t_0}(y_0) \prod_{j=1}^{k} p^*_{t_j - t_{j-1}}(y_{j-1}, y_j)\,,$$

contre la mesure $M_+(\cdot \cap \{\sigma(e) > t_k\})$.

Démonstration. Le résultat est vrai pour $k = 0$ par le théorème précédent. Par récurrence, supposons-le vrai au rang $k-1$. Alors avec des fonctions $\varphi_j \in \mathcal{C}_b^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ qui s'annulent en 0 :

$$M_+\left(\prod_{j=0}^{k} \varphi_j(e(t_j))\right) \quad = \quad M_+\left(\prod_{j=0}^{k-1} \varphi_j(e(t_j)) \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*_{e_{t_{k-1}}}}[\varphi_k(f(t_k - t_{k-1}))]\right),$$

et on conclut en développant l'espérance conditionnelle à partir de la densité pour $\mathbb{P}^*$. $\square$